Übungsstunde 12:

Themen:

- Aufgabe 9.3 Nachbesprechung
- Prüfung Herbstsemester 2017

Prüfung Herbstsemester 2017:

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a)

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\rangle \overset{!}{=} 0 = 1 - \alpha \qquad \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\rangle \overset{!}{=} 0 = 2 - 2\beta \qquad \underline{\underline{\beta = 1}}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \overset{!}{=} 0 = 0$$

b)

1. $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{R}}}$$

2. $$|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = |\det(Q)\det(R)| = \underbrace{|\det(Q)|}_{1}\,|\det(R)| = \underline{\underline{6}}$$

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von C.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

a)

EW: $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 9\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 2}} \qquad \underline{\underline{\lambda_2 = 5}} \qquad \underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$$

EV: $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 2$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_2 = 5$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -t \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_5 = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_3 = -1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} x_3 = u \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \end{array} \Rightarrow E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad x_1 = u$$

b) C symmetrisch $\rightarrow$ alle EV orthogonal & mit Länge 1 gewählt

$$\Rightarrow \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $e^C = T e^D T^T$ mit $\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e^C"] \arrow[d, "T^T"'] & A \arrow[d, shift right] \\ B \arrow[r, "e^D"] & B \arrow[u, shift right, "T"'] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow e^C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^5 + e^{-1} & 0 & e^{-1} - e^5 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ e^{-1} - e^5 & 0 & e^5 + e^{-1} \end{bmatrix}$$

3. [6 Punkte] Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}^k$ den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $< k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definiert für alle $f \in \mathcal{P}^3$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1, x, x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1-x, 2x, 4x^2$ und im Bildraum die Basis $2, \frac{x}{4}, \frac{x^2}{3}$. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

$$f(x) \mapsto x f'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds$$

a) 2 Kriterien: $\forall a, b \in \mathcal{P}^3, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

$$\mathcal{F}(a(x)) = x \cdot a'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)\,ds$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, da:

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{3}{2}} x \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x^2) = \underline{\frac{7}{3}} x^2 \in \mathcal{P}^3$

überprüfen i) & ii):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(a + \alpha b) &\overset{!}{=} \mathcal{F}(a) + \alpha \mathcal{F}(b) \\
&= x \cdot (a + \alpha b)' + \frac{1}{x}\int_0^x (a(s) + \alpha b(s))\,ds \\
&= x(a' + \alpha b') + \frac{1}{x}\left(\int_0^x a(s)\,ds + \alpha \int_0^x b(s)\,ds\right) \\
&= xa' + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)\,ds + \alpha\left(x b' + \int_0^x b(s)\,ds\right) \\
&= \mathcal{F}(a) \qquad + \alpha \qquad \mathcal{F}(b) \qquad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^3 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "k_x"] & \mathcal{P}^3 \arrow[d, "k_x"] \\
B \arrow[r, "A"] & B
\end{tikzcd}$$

b)

$$\left.\begin{aligned}
1 &\xrightarrow{F} 1 = 1\cdot 1 + 0\,x + 0\,x^2 \\
x &\xrightarrow{F} \tfrac{3}{2}x = 0\cdot 1 + \tfrac{3}{2}\,x + 0\,x^2 \\
x^2 &\xrightarrow{F} \tfrac{7}{3}x = 0\cdot 1 + 0\cdot x + \tfrac{7}{3}\,x^2
\end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

c) $\overset{C}{\{1-x,\ 2x,\ 4x^2\}} \longrightarrow \overset{D}{\{2,\ \tfrac{x}{4},\ \tfrac{x^2}{3}\}}$

$$\begin{tikzcd}
P^3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_x"] & P^3 \arrow[d, "k_x"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"] \arrow[d, "\underline{\underline{T}}"] & \mathcal{B} \arrow[d, "\underline{\underline{T}}'"] \\
C \arrow[r, "\underline{\underline{B}}"] & D
\end{tikzcd}
\qquad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{T}}'\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned}
1-x &\xrightarrow{F} 1-\tfrac{3}{2}x = \tfrac{1}{2}\cdot 2 - 6\,\tfrac{x}{4} + 0\,\tfrac{x^2}{3} \\
2x &\xrightarrow{F} 3x = 0\cdot 2 + 12\,\tfrac{x}{4} + 0\,\tfrac{x^2}{3} \\
4x^2 &\xrightarrow{F} \tfrac{28}{3}x^2 = 0\cdot 2 + 0\,\tfrac{x}{4} + 28\,\tfrac{x^2}{3}
\end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

4. [6 Punkte] Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$x = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2,$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

Hinweis: Mit der Notation "argmin" in (1) ist das Element $x \in \mathbb{R}^2$ gemeint, welches den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$d_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$USV^T x = b \quad | \; U^T \cdot$$

$$SV^T x = U^T b = d$$

$$\hat{S} V^T x = d_0$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

a) V: Eigenwerte von $A^T A$

$$A^T A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}}$$

EW: $\det(A^T A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(13-2\lambda)}_{\pm 5}{}^2 - 25 \overset{!}{=} 0$$

$\lambda_2 = \underline{4}$ $\quad \lambda_1 = \underline{9}$ $\quad S = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

$\sigma_2 = \underline{2}$ $\quad \sigma_1 = \underline{3}$ $\Rightarrow \hat{S} = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$

EV: $(A^TA - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 9$: $\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_1 = -s \end{array}\right\} E_9 = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = 4$: $\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = t \end{array}\right\} E_4 = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

U: $u^{(1)} = \dfrac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \dfrac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} = \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$u^{(2)} = \dfrac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \dfrac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & * \\ -1 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \underline{\underline{U}}^T \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ * \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}\right\} d_0 \\ \end{matrix}$$

$\underline{d_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\underline{x} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\hat{S}}}^{-1}\underline{d_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T\underline{b}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T\underline{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \left.\begin{matrix} 13 & -5 \\ 0 & 144 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 \\ 72 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \\ x_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{matrix}$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2[-1,1] \times \mathcal{L}^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

a) $\forall x, y, z \in \mathcal{L}^2 . \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x(t), \alpha y(t) + \beta z(t) \rangle \overset{!}{=} \alpha \langle x(t), y(t) \rangle + \beta \langle x(t), z(t) \rangle$

(ii) $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle y(t), x(t) \rangle$

(iii) $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$ & $\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \iff x(t) = 0$

i) $\langle x(t), \alpha y(t) + \beta z(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t)(\alpha y(t) + \beta z(t)) \, dt$

$= \alpha \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt + \beta \int_{-1}^{1} x(t) z(t) \, dt$

$= \alpha \langle x(t), y(t) \rangle + \beta \langle x(t), z(t) \rangle$ ✓

ii) $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt = \int_{-1}^{1} y(t) x(t) \, dt$

$= \langle y(t), x(t) \rangle$ ✓

iii) $\langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)^2}_{\geq 0} dt \geq 0 \quad \Rightarrow \int_{-1}^{1} x(t)^2 dt = 0$

$\iff x(t) = 0$ ✓

$\hookrightarrow = 0 \iff x(t) = 0$

b) Orthonormal: $\langle f_k, f_k \rangle = 1$

$\langle f_k, f_j \rangle = 0 \quad k \neq j$

$$< f_k, f_k > = \int_{-1}^{1} \sin(\pi k t)^2 \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(\cos(0) - \cos(2\pi k t)) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \, dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos(2\pi k t) \, dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \left[t \right]_{-1}^{1}}_{= 1} - \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi k} \sin(2\pi k t) \right]_{-1}^{1}}_{0}$$

$$= 1 \quad ✓$$

$$< f_k, f_j > = \int_{-1}^{1} \sin(\pi k t) \sin(\pi j t) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(\cos((k-j)\pi t) - \cos((k+j)\pi t)) \, dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(k-j)\pi} \sin(\underbrace{(k-j)}_{\in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \pi t) \right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(k+j)\pi} \sin(\underbrace{(k+j)}_{\in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \pi t) \right]_{-1}^{1}}_{= 0}$$

c) Folgt direkt aus b)

d) $\dim \{ \mathcal{L}^2 \} = \infty$

$\rightsquigarrow$ Haben unendlich viele lin. unabh. Funktionen f_k $k \in \mathbb{N}$ gefunden.

6. [6 Punkte] Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungsystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Sei $\mathcal{P}^k$ wie in Aufgabe **3.** definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \to \mathcal{P}^9$ gegeben für alle $f \in \mathcal{P}^5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(xf(x)^2\right), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$